Soit (Ω, 𝒜, P) un espace probabilisé.

I. Loi normale centrée réduite (p.127).

Def 1: Une variable aléatoire réelle X suit **la loi normale centrée réduite** si elle a pour densité: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On note alors $X \sim N(0;1)$.

Sa fonction de répartition n'a pas d'expression "explicite" à l'aide des fonctions usuelles.

Prop 1: $E(X)=0;\ V(X)=1$

II. Loi normale de paramètres m et σ.

Def 2: Soient $m\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$. X suit une **loi normale de paramètres m et σ** si elle a pour densité:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$, on note alors $X \sim N(m;\sigma)$.

On se ramène à la loi normale centrée réduite grâce à:

Prop 2: $X \sim N(m;\sigma) \Leftrightarrow \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0;1)$

Prop 3: Soit $X \sim N(m;\sigma)$. Alors $E(X)=m$ et $V(X)=\sigma^2$.

Lorsque l'on considère $\frac{X-m}{\sigma}$, on dit que l'on a centré et réduit la variable X.

III. Loi normale en dimension 2 (p.147).

Def 3: Le vecteur $V=(X;Y)$ suit une **loi normale centrée** s'il a une densité f définie par:

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x;y)=\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{1}{2}Q(x;y)},$$

où Q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^2$, et $\alpha=\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}Q(x;y)}dxdy$. On dit aussi que V est un vecteur normal, ou Gaussien (centré).

On note la matrice de Q: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

Alors $\alpha=\frac{2\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$

Prop 4: Avec les notations ci-dessus, on a :

$E(X)=E(Y)=0$, et $Cov(X;Y)=\frac{-b}{ac-b^2}$.

Prop 5: Les **composantes** X et Y du vecteur V=(X;Y) suivent des **lois normales.**

Prop 6: Soit $V=(X;Y)$ un vecteur normal.

Alors on a l'équivalence:
(X et Y sont indépendants) ssi (Cov(X;Y)=0)

Def 4: Soit $V=(X;Y)$ un vecteur normal. On appelle **matrice de variances-covariances** la matrice Σ:

$$\Sigma=\begin{pmatrix} V(X) & Cov(X;Y) \\ Cov(X;Y) & V(Y) \end{pmatrix}=A^{-1}$$

où A est la matrice de la forme quad. def. pos. Q

Prop 7: $V=(X;Y)$ **suit une loi normale ssi** il admet une densité f qui s'écrit: $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(x;y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Sigma}}.e^{-\frac{1}{2}(x\ y)\Sigma^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}},$$

où Σ est la matrice des variances-covariances de V.

Par translation, on définit la loi normale générale (non nécessairement centrée):

Def 5: Soit $V=(X;Y)$ d'espérance $m=(E(X);E(Y))$

V suit une loi normale ssi $V-m$ suit une loi normale centrée.

Prop 8: Un vecteur aléatoire V d'espérance $m=(m_1;m_2)$ et de matrice de variances-covariances Σ **suit une loi normale ssi** une densité de V est f définie par: $\forall u\in\mathbb{R}^2, f(u)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Sigma}}e^{-\frac{1}{2}{}^t(u-m)\Sigma^{-1}(u-m)}$

Prop 9: Soit $V=(X;Y)$ un vecteur normal de matrice de variances-covariances Σ.
Les v.a.r. **X et Y sont indépendantes ssi** Σ est une matrice diagonale.

IV. Loi normale en dimension p.

Def 6: Le vecteur $V=\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots \\ X_p\end{pmatrix}$ **suit une loi normale** (centrée) s'il a une densité f qui s'écrit:

$$\forall(x_1;\ldots;x_p)\in\mathbb{R}^p, f(x_1;\ldots;x_p)=\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{1}{2}Q(x_1;\ldots;x_p)}$$

où Q est une forma quadratique définie-positive sur $\mathbb{R}^p$,

et $\alpha=\int\cdots\int_{\mathbb{R}^p} e^{-\frac{1}{2}Q(x_1;\ldots;x_p)}dx_1\ldots dx_p$

Prop 10: Soit $V=\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots \\ X_p\end{pmatrix}$ tel que les composantes X_i possèdent un moment d'ordre 2. En notant Σ sa matrice de variances-covariances définie par:

$\forall(i;j)\in[\![1;p]\!]^2, \Sigma_{i,j}=Cov(X_i;X_j)$, on a:

V suit une loi normale (centrée) ssi il a une densité qui peut s'écrire:

$$\forall u \in \mathbb{R}^p, f(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^p \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}{}^t u \Sigma^{-1} u}$$

D'une manière générale, V suit une loi normale si V-m suit une loi normale centrée,

où $m = (E(X_1);\dots;E(X_p))$*, ce qui équivaut à dire que V a une densité qui s'écrit:*

$$\forall u \in \mathbb{R}^p, f(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^p \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}{}^t(u-m)\Sigma^{-1}(u-m)}$$

Et on note alors $X \sim N(m;\Sigma)$.

Les résultats démontrés dans le cas p=2 se généralisent: Si V suit une loi normale, alors ses composantes aussi, et elles sont indépendantes ssi Σ est diagonale.

V. Théorème central limite (229 – p.164).

Cette loi apparaît comme "loi limite" en vertu du théorème central limite.

Th 1: Théorème central limite (admis): Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi, admettant une espérance m et une variance σ². Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

(on a alors $E(S_n)=n.m$, et $V(S_n)=n\sigma^2$).

Alors la variable S_n centrée et réduite **converge en loi** vers une v.a.r. X qui suit une loi **N(0;1)**, soit:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}.\sigma} \le x\right) \xrightarrow[n\infty]{} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Remarque: On n'a pas besoin de connaître la loi des X_n.

Th 2 : Th. de De Moivre-Laplace: Soit (X_i) une suite de **variables de Bernoulli B(p)**, indépendantes. La variable $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi binomiale B(n;p).

Alors la variable centrée réduite $S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ converge en loi vers X qui suit une loi **N(0;1).**

La loi N(0;1) est donc une approximation de la loi binomiale centrée réduite.
Dans la pratique, on prend comme condition n≥30 et np(1-p)≥9 pour remplacer une loi binomiale centrée réduite par une loi normale N(0;1).

Exemple: (source?) On joue 2500 fois au jeu de pile ou face. quelle est la probabilité que le nombre de pile soit compris entre 1250 et 1260?

Remarque: S_n étant discrète, S_n^* l'est aussi, et on a donc une suite de v.a.r. discrètes qui converge vers une v.a.r. continue.

VI. Notes.

Wikipedia: La loi normale est une des principales distributions de probabilité. Elle a été introduite par le mathématicien Abraham de Moivre en 1733 et utilisée par lui afin d'approcher des probabilités associées à des variables aléatoires binomiales possédant un paramètre n très grand. Cette loi a été mise en évidence par Gauss au XIXe siècle et permet de modéliser de nombreuses études biométriques. Sa densité de probabilité dessine une courbe dite courbe en cloche ou courbe de Gauss.